VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

2. FORȚE EXTERIOARE ŞI FORȚE INTERIOARE

2.1. Forțe exterioare. Clasificare

Construcțiile inginereşti sunt realizate din unul sau mai multe (ER). În Rezistența materialelor se analizează fiecare ER sau subansamblu **numai în situația de echilibru sub acțiunea forțelor exterioare,** aşa că valoarea torsorului forțelor exterioare, ce acționează asupra unui ER sau subansamblu, este totdeauna egal cu zero.

În cele câte urmează prin **forță** se va înțelege noțiunea de **forță generalizată: forță sau moment.**

În Rezistența materialelor noțiunea de **forță exterioară** cuprinde atât **forțele aplicate** pe suprafața ER cât si cele **distribuite pe întreaga masă a materialului** cum sunt: greutatea, forțele de inerție, forțele electromagnetice, datorită dilatării împedicate, etc., precum şi **forțele de legătură dintre (ER)** numite reacțiuni.

Forțele exterioare se pot clasifica astfel:

a) după **natura** lor:

- **sarcini** sau **forțe active**;
- **reacțiuni** sau **forțe de legătură**.

b) după locul de aplicare:

- **de suprafață** sau **de contur**, ce se aplică în exteriorul ER;
- **de volum** sau **masice**, ce sunt distribuite în întregul volum al ER.

c) după mărimea suprafeței pe care se aplică, forțele de suprafață pot fi:

- **concentrate**, ce se consideră aplicate într-un punct şi constituie o schematizare a forțelor distribuite pe o suprafață foarte mică, în raport cu suprafața (ER), (fig. 2.1,a);

- **distribuite**, ce se repartizează **uniform** sau cu **intensitate variabilă** pe o suprafață sau în lungul unei linii (fig. 2.1,b).

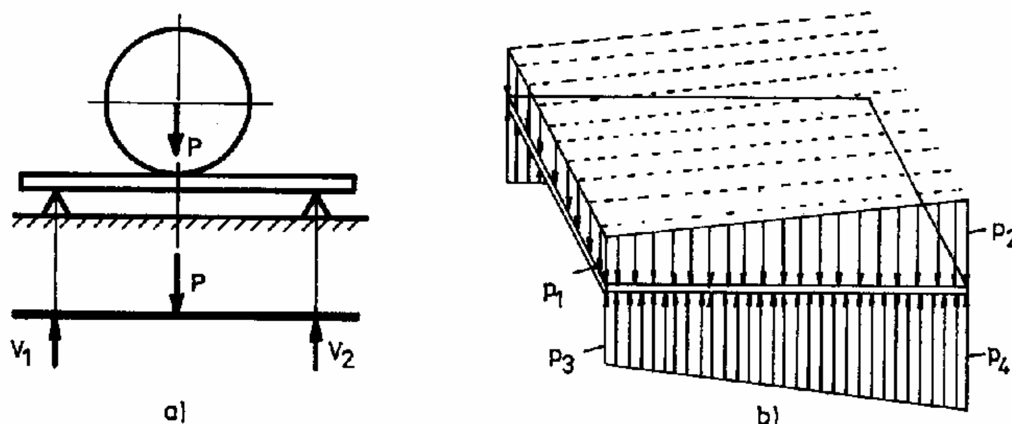


Fig. 2.1.

Forțele concentrate se măsoară în N, kN, MN, etc. iar cele distribuite pe suprafață se măsoară în N/m^2 sau Pa, N/mm^2 sau MPa, kN/m^2, etc. iar cele distribuite în lungul unei linii în N/m, kN/m, etc.

Sarcinile aplicate (ER) pot fi clasificate astfel:

a) După **proveniență**:

-**sarcini permanente**, ce-şi păstrează intensitatea constantă (exemplu: greutatea proprie a ER);

-**sarcini utile** formate din acelea ce rezultă din rolul funcțional al ER (exemple: greutatea autovehiculelor pentru un pod, încărcătura pentru mijloacele de transport, forța de aşchiere pentru scule, etc.);

-**sarcini accesorii** ce apar în timpul funcționării (exemple: forțe de inerție, forțe de frecare, dilatare împiedicată, etc.);

-**sarcini accidentale**, ce acționează intermitent şi neregulat (exemple: acțiunea vântului, greutatea zăpezii, etc.);

-**sarcini extraordinare**, ce acționează întâmplător dar pot avea efect catastrofal (exemple: incendiile, exploziile, inundațiile, cutremurele de pământ, etc.).

Sarcinile permanente, utile şi accesorii se numesc **sarcini fundamentale.**

b) După **modul de acțiune în timp** se pot clasifica în:

-**sarcini statice**, ce se aplică lent iar apoi îşi păstrează intensitatea constantă (fig.2.2,a);

-**sarcini dinamice**, ce se aplică cu viteză variabilă relativ mare şi care pot fi:

-**sarcini aplicate brusc**, ce produc şoc (fig.2.2,b);

-**sarcini variabile în timp** a căror intensitate variază periodic după o anumită lege, (fig.2.2,c).

c) **După poziția sarcinii pe ER**

-**sarcină fixă**, ce acționează în acelaşi loc pe toată durata funcționării construcției (exemplu: greutatea proprie);

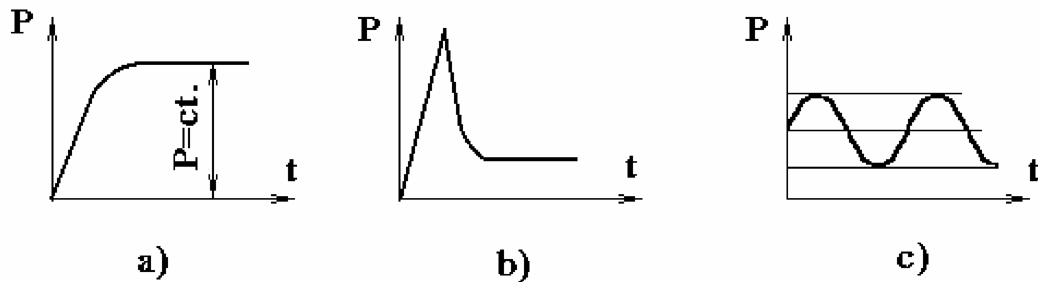


Fig. 2.2

-**sarcină mobilă**, a cărei poziție este variabilă (exemplu: greutatea unui vehicul pe un pod).

2.2. Reacțiuni

Reacțiunile sau **forțele de legătură** reprezintă acțiunea mecanică a legăturilor ER cu alte (ER) şi iau naştere la acțiunea sarcinilor asupra ER respectiv.

Tabelul 2.1.

Solici-tare	Denumire	Legătura mecanică	Simbol	Reacțiuni
plană	reazem simplu mobil			V
	ghidaj dublu			M
	articulație cilindrică simplă			H, V
	ghidaj simplu			M, V
	încastrare			H, M, V
spațiu	articulație sferică			X, Y, Z
	articulație cilindrică și ghidaj			Mx, X, Y, My
	articulație cilindrică		z	Mx, X, Y, Z, My
	încastrare			X, Mx, Y, Z, Mz, My

Legăturile, anulează unul sau mai multe grade de libertate ale ER, restrângându-i posibilitățile de mişcare. Conform **axiomei legăturilor, efectul legăturii unui ER, supus acțiunii sarcinilor, poate fi întotdeauna înlocuit prin reacțiuni (forțe de legătură), corespunzătoare, ce se determină din condițiile de echilibru**. Când numărul ecuațiilor de echilibru distincte este egal cu cel al reacțiunilor ER constituie un **sistem static determinat**, iar când numărul ecuațiilor de echilibru este mai mic decât numărul reacțiunilor, sistemul este **static nedeterminat**. **Gradul de nedeterminare** este dat de diferența dintre numărul reacțiunilor şi numărul ecuaților de echilibru. Ridicarea nedeterminării, se realizează în Rezistența materialelor , prin introducerea **condițiilor geometrice de deformare**.

Felul legăturilor care pot apărea la capătul unei bare şi modul de inlocuire cu reacțiuni sunt redate în tabelul 2.1.

Evaluarea sarcinilor şi determinarea reacțiunilor constituie una din problemele importante ale rezistenței materialelor.

Spre deosebire de mecanica teoretică, în Rezistența materialelor **forțele sunt vectori legați** de punctul de aplicație. **Schimbarea punctului de aplicație a forței nu schimbă starea de echilibru dar poate modifica starea de solicitare a ER**.

2.3. Forțe interioare

Forțele interioare sau **eforturile** se produc în interiorul ER când acesta este acționat de forțe exterioare. Pentru determinarea eforturilor, Rezistența materialelor utilizează **metoda secțiunilor, a lui Cauchy**. Această metodă este echivalentă cu teorema echilibrului părților: **dacă un ER este în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe, atunci şi o parte oarecare din acest corp este, de asemenea în echilibru sub acțiunea forțelor corespunzătoare acestei părți**.

Această metodă constă în:

- secționarea imaginară a ER, în locul unde urmează să fie determinate forțele interioare (eforturile) aferente;

- reprezentarea, pe porțiunile ER obținute, a forțelor exterioare şi a celor interioare aferente;

- scrierea ecuațiilor de echilibru pentru sarcinile exterioare şi eforturi, reprezentate pentru una din porțiunile ER secționat.

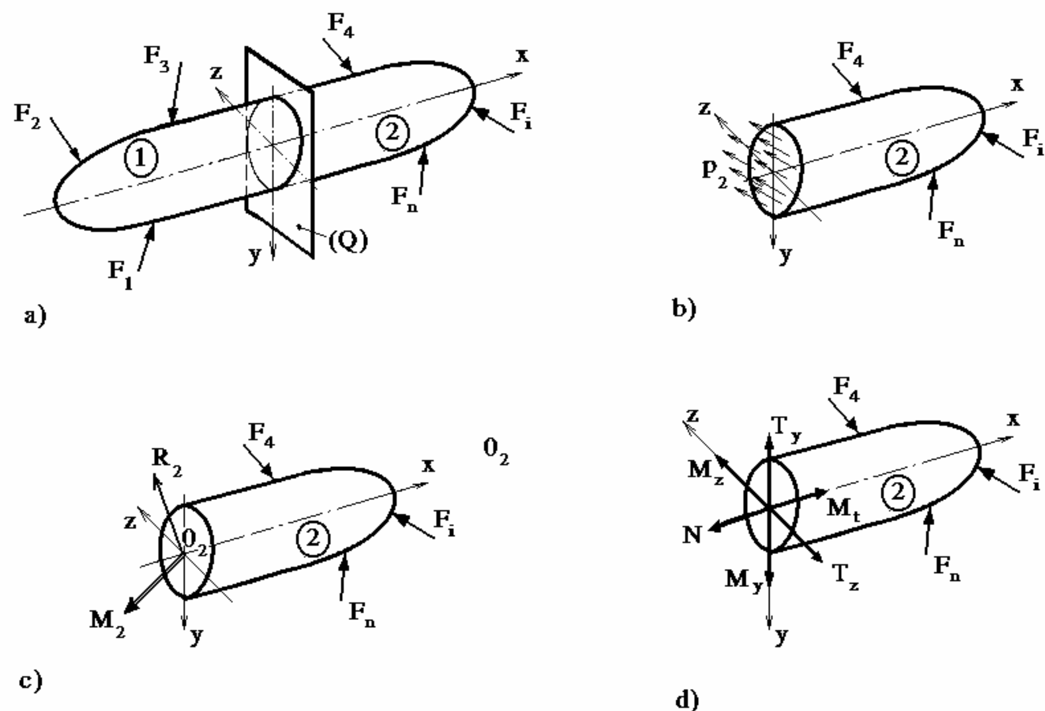


Fig. 2.3

Se consideră o bară oarecare acționată de un sistem de forțe F_1, F_2...F_n (figura 2.3-a), care se secționează cu un **plan imaginar Q, normal pe axa barei**. Prin secționare se obțin două părți: ① şi ②. Cele două părți ale barei se echilibrează prin forțele interioare distribuite p, ce se produc pe fețele de separație A (fig.2.3,b). Forțele distribuite pe suprafața A a părții ②, se reduc în centrul de greutate O_2 la o forță rezultantă R_2 şi un moment rezultant M_{02}. Acestea constituie totodată efectul părții ① asupra părții ②. Deci, forțele p de pe fața A a părții ② sunt echivalente cu **torsorul de reducere în 0_2** a forțelor ce acționează asupra părții ① (fig.2.3c).

La fel, dacă se reprezintă partea ①; acțiunea părții ② asupra părții ① este echivalentă, în O_1, cu rezultanta R_1 şi momentul rezultant M_{01}.

Acțiunea părții ①, asupra părții ② este egală şi de sens contrar cu acțiunea părții ② asupra părții ① (conform principiului acțiunii şi reacțiunii) şi rezultă:

$$\overline{\mathbf{R}_1} = \overline{\mathbf{R}_2} = \overline{\mathbf{R}} \qquad \text{şi} \qquad \overline{\mathbf{M}_{01}} = \overline{\mathbf{M}_{02}} = \overline{\mathbf{M}_0}\,.$$

Elementele torsorului de reducere în centrul de greutate a secțiunii al forțelor ce acționează asupra părții din stânga sunt egale şi de sens contrar cu elementele torsorului de reducere, în acelaşi punct, al forțelor ce acționează asupra părții din dreapta.

Elementele R_1 , M_{01}, şi respectiv R_2, M_{02} ce asigură echilibrul fiecărei părți se numesc **forțe interioare**.

Acestea sunt, totodată, rezultantă şi respectiv momentul rezultant al forțelor interioare elementare ce se produc între particulele celor două părți la acțiunea sarcinilor. Prin separarea, printr-un plan imaginar, a celor două părți forțele interioare au fost transpuse în categoria forțelor exterioare şi luate în considerare ca atare.

Proiectând elementele torsorului de reducere în O, pe axele de coordonate, se obțin şase componente: trei forțe: N, T_y, T_z şi trei momente: M_t, M_y, M_z (fig.2.3,d). **Componentele N, T_y, T_z,** M_t, M_y, M_z se numesc eforturi secționale sau eforturi din secțiune şi le vom numi **EFORTURI**. Fiecare efort are **o denumire,** îi corespunde **o deplasare** (deformație) şi **produce o solicitare simplă** asupra barei.

Forța normală sau **forța axială** N (fig. 2.3,d), este egală cu suma algebrică, luată cu semn schimbat, a proiecțiilor pe axa x, a tuturor forțelor situate în stânga (sau la dreapta, luate cu acelaşi semn) secțiunii considerate:

$$\mathbf{N} = -\sum_{1} \mathbf{F_x} = \sum_{2} \mathbf{F_x}\,. \qquad \textbf{(2.1)}$$

unde 1 înseamnă că se iau forțele de pe partea stângă, iar 2, forțele de partea dreaptă.

Forța normală se consideră **pozitivă** când produce **solicitarea de întindere, care lungeşte bara** şi **negativă** când produce **solicitarea de compresiune, care scurtează bara.**

Forța tăietoare T_y, respectiv T_z, este egală cu suma proiecțiilor pe axele 0y şi respectiv 0z, din planul secțiunii, luate cu semn schimbat, a tuturor forțelor situate la stânga (sau la dreapta cu acelaşi semn) secțiunii considerate:

$$\mathbf{T_y = -\sum_1 F_y = \sum_2 F_y; \qquad T_z = -\sum_1 F_z = \sum_2 F_z}\,. \qquad \mathbf{(2.2)}$$

Forța tăietoare T_y este **pozitivă** dacă **deplasează secțiunea în sens contrar axei 0y**, în planul **x0y**, iar T_z în sens contrar axei 0z. **Forțele tăietoare produc solicitarea de forfecare sau tăiere.**

Momentul încovoietor M_z, respectiv **M_y,** este egal cu suma momentelor în raport cu axa 0z, respectiv 0y, din planul secțiunii, a tuturor cuplurilor de forțe şi momentelor forțelor, situate la stânga (sau la dreapta luate cu minus) secțiunii considerate:

$$\mathbf{M_z = \sum_1 M_z = -\sum_2 M_z} \quad \text{şi} \quad \mathbf{M_y = \sum_1 M_y = -\sum_2 M_y}\,. \qquad \mathbf{(2.3)}$$

Momentele încovoietoare produc solicitarea de încovoiere. Deformația produsă de momentul încovoietor este de rotire a secțiunii în jurul axei respective: M_z, în jurul axei Oz şi respectiv M_y în jurul axei Oy. Momentul M_z se consideră **pozitiv**, **când comprimă fibra superioară şi întinde pe cea înferioară**, iar M_y este pozitiv când comprimă fibra din partea pozitivă a axei Oz şi întinde fibra din partea negativă (fig. 2.4).

Momentul de răsucire M_t este egal cu suma algebrică a momentelor forțelor şi a cuplurilor situate la stânga secțiunii (sau la dreapta luate cu semn minus) față de axa Ox:

$$\mathbf{M_t = \sum_1 M_x = -\sum_2 M_x}\,. \qquad \mathbf{(2.4)}$$

Momentul de torsiune este pozitiv atunci când forțele sau cuplurile din stânga secțiunii rotesc în sens orar, iar cele din dreapta în sens antiorar.

Prezența simultană în secțiunea barei a două sau mai multe eforturi produc, în bară, o solicitare compusă.

În general, se determmină eforturile de pe fața din dreapta secțiunii (O_2yz din fig.2.3,d) şi în acest caz se reduc forțele din partea stângă a secțiunii. Când este mai simplu să se reducă forțele din partea dreaptă atunci se obțin eforturile de pe fața din stânga, care au însă sensuri opuse față de cele determinate în primul caz. Dacă s-au dedus forțele de pe partea din stânga a secțiunii şi trebuie raportate la fața din dreapta atunci acestora li se schimbă semnul.

De reținut că reprezentarea interacțiunii, prin forțe aplicate în O, este o reprezentare convențională simplă a fenomenului complex de interacțiune între cele două părți, (fig.2.3,b).

Observație: Se pot obține, mai simplu, eforturile din secțiune procedând astfel:

a) se analizează în ce parte a secțiunii sunt mai puține forțe şi se **ia în considerare numai forțele din acea parte (din stânga sau din dreapta);**

b) se descompune fiecare forță, din acea parte, după direcțiile axelor în secțiune;

c) se reduce fiecare componentă obținută din forțe, în centrul de greutate al secțiunii;

d) se însumează proiecțiile forțelor şi ale momentelor corespunzătoare pentru fiecare axă în parte, ținând seama de regula de semne, obținându-se astfel:

- **N** = suma proiecțiilor forțelor pe axa Ox;
- $\mathbf{T_y}$= suma proiecțiilor forțelor pe axa Oy;
- $\mathbf{T_z}$= suma proiecțiilor forțelor pe axa Oz;
- $\mathbf{M_y}$= suma proiecțiilor momentelor pe axa Oy;
- $\mathbf{M_z}$= suma proiecțiilor momentelor pe axa Oz;
- $\mathbf{M_t}$= suma proiecțiilor momentelor pe axa Ox.

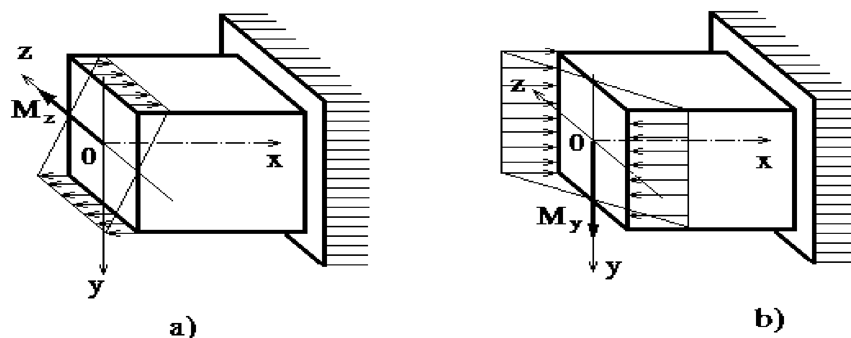


Fig. 2.4

2.4. Funcții de eforturi

Valorile eforturilor din secțiune (N, T_y, T_z, M_y, M_z, M_x) variază în lungul barei, în funcție de modul de încărcare şi de forma barei. Una din problemele principale, ale calculului de rezistență, este cunoaşterea valorilor eforturilor din fiecare secțiune transversală. Astfel, se exprimă variația fiecărui efort în funcție de coordonatele punctelor axei şi se obține câte o **funcție de eforturi**. Pentru o bară dreaptă, ce are axa orientată, după Ox, funcțiile de efort se exprimă în dependență de abscisa x a secțiunii: $\mathbf{N = N(x);\ T_y = T_y(x);\ldots\ M_z = M_z(x).}$

Variația eforturilor în lungul axei barei, sub acțiunea sarcinilor fixe, poate fi urmărită cel mai bine pe **diagramele de eforturi**. Acestea sunt reprezentări grafice ale funcțiilor de eforturi în funcție de abscisa secțiunii "x" de pe axa barei. **Diagrama de efort se obține prin trasarea unei linii subțiri care să unească punctele ce satisfac ecuația** funcției efortului respectiv. Aceasta se **reprezintă în lungul unei linii de referință, trasată cu linie groasă, paralelă şi de lungime egală cu axa barei**. Astfel, pentru fiecare efort se trasează câte o diagramă.

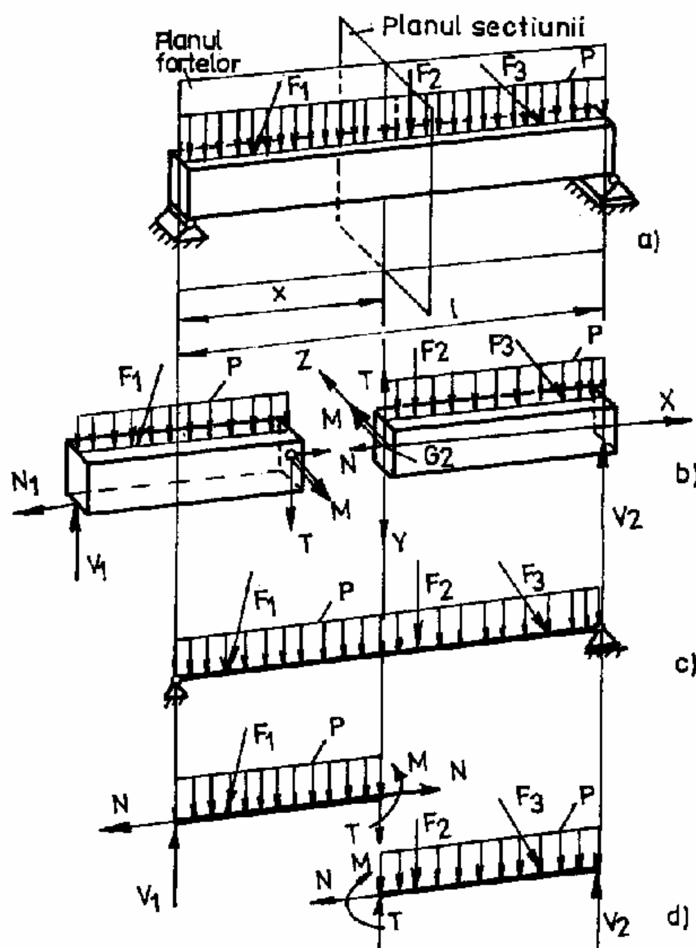


Fig. 2.5

În practică se întâlnesc frecvent bare drepte sau curbe

plane, ce sunt încărcate cu forțe conținute în planul de simetrie longitudinal al barei. În figura (2.5,a), s-a reprezentat o astfel de bară unde s-a notat cu xOy planul forțelor. S-au determinat reacțiunile şi apoi eforturile din secțiunea aflată la abscisa "x" de reazemul 1. În figura (2.5,b) s-a reprezentat bara respectivă pe care s-au figurat reacțiunile şi respectiv eforturile interioare din secțiunea de abscisă "x".

În acest caz particular se pot determina eforturile:

a) **forța axială**, egală cu suma algebrică a proiecțiilor forțelor exterioare aplicate în stânga (sau în dreapta) secțiunii considerate pe axa barei;

b) **forța tăietoare**, **$T=T_y$**, egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe axa Oy a tuturor forțelor situate la stânga (sau la dreapta) secțiunii considerate;

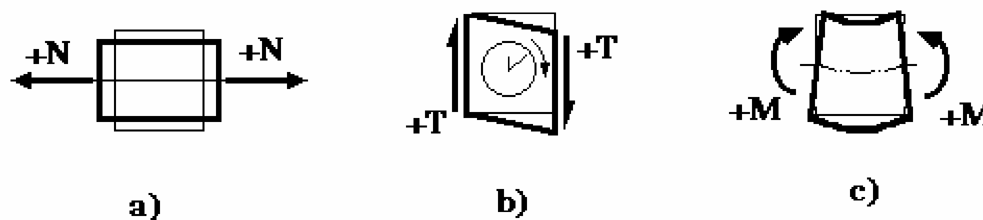


Fig. 2.6

c) **momentul încovoietor, $M=M_z$**, egal cu suma algebrică a momentelor forțelor în raport cu axa Oz, a tuturor forțelor şi momentelor situate în stânga (sau în dreapta) secțiunii considerate.

În mod uzual, pentru trasarea diagramelor de eforturi pentru sarcini conținute într-un singur plan, se foloseşte schema plană din figura (2.5,d). Eforturile secționale, din stânga respectiv din dreapta secțiunii, se reprezintă ca în figura 2.5,d.

Regula de semne pentru starea plană, este dată în figura 2.6:

- forța axială N, este pozitivă când lungeşte elementul de bară (fig.2.6,a) şi negativă când **scurtează** elementul de bară.

- forța tăietoare T, este pozitivă când are tendința să rotească în sens orar elementul de bară (fig.2.6,b);

- **momentul încovoietor M, se consideră pozitiv când roteşte cele două fețe laterale**, curbând fibrele, **astfel ca fibrele superioare să se scurteze iar cele inferioare să se lungească** (fig.2.6,c).

2.5. Relații diferențiale între sarcini şi eforuri

Trasarea diagramelor de eforturi poate fi mult uşurată dacă se cunosc **atât funcțiile de eforturi** cât şi **relațiile diferențiale între eforturi şi diferite sarcini**.

Pentru a stabili relațiile diferențiale dintre sarcini şi eforturi se consideră un element de bară curbă plană, asupra căruia acționează un sistem de sarcini conținute în planul axei barei. Elementul de bară, de lungime infinit mică ds, are raza de curbură r, iar unghiul format de cele două secțiuni este $d\alpha$. Lungimea elementului este $ds = r \cdot d\alpha$ (fig.2.7,a).

Asupra elementului ds se consideră că acționează sarcinile:

- **q**, uniform distribuită pe lungimea ds, a elementului;
- **F** şi $\mathbf{M_{e}}$, concentrate şi acționând în secțiunea ce trece prin punctul 0.

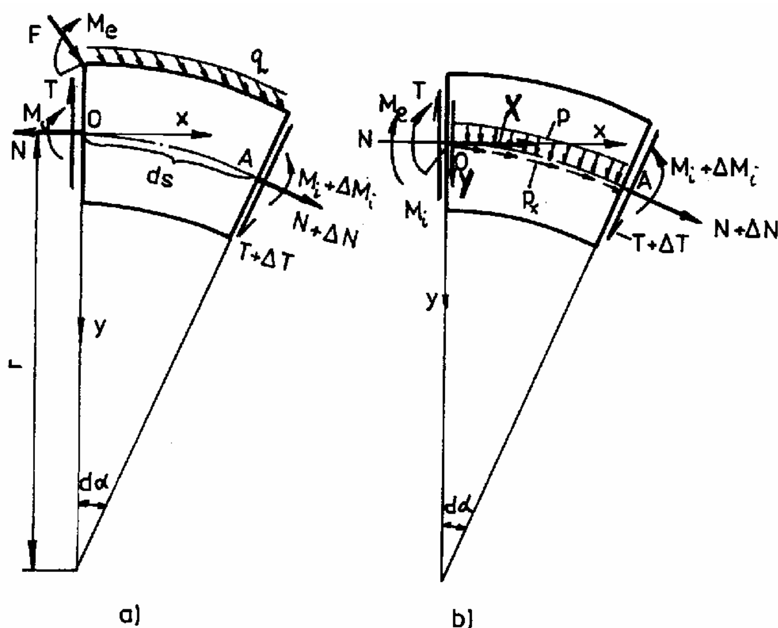


Fig. 2.7

Aşa cum s-a arătat şi la observaţiile de la §2.3, aceste **sarcini trebuie descompuse după direcțiile axelor de coordonate şi se consideră că acționează asupra axei barei.** În figura (2.7,b) s-a reprezentat modul de acțiune al sarcinilor. Tot în figura (2.7,b) s-au reprezentat eforturile: **N, T, M** în secțiunea O şi respectiv $\mathbf{N + \Delta N}$, **T+ΔT** şi **M+ΔM** în secțiunea A.

Conform metodei secțiunilor (a lui Cauchy) dacă elementul inițial este în echilibru atunci şi porțiunea din element de lungime ds, va trebui să fie în echilibru.

Se pot scrie în acest caz ecuațiile:

$$\begin{aligned}
&\sum X = 0,\\
&(N + \Delta N)\cdot \cos d\alpha - N - (T + \Delta T)\cdot \sin d\alpha + X + p_X \cdot ds = 0,\\
&\sum Y = 0;\\
&(T + \Delta T)\cdot \cos d\alpha - T + (N + \Delta N)\cdot \sin d\alpha + Y + pds = 0;\\
&\sum M_O = 0;\\
&(M+\Delta M) - M - (N+\Delta N)\cdot r\cdot(1-\cos d\alpha) - (T+\Delta T)\cdot r\cdot \sin d\alpha - p\cdot ds\cdot \frac{ds}{2} - M_e = 0.
\end{aligned} \qquad (2.5)$$

Întrucât unghiul **dα** este foarte mic se aproximează:

$\sin d\alpha \cong d\alpha$ şi $\cos d\alpha = 1.$

Dacă se neglijează produsele infiniților mici relațiile (2.5) devin:

$$\begin{aligned}
&\Delta N - T\cdot d\alpha + X + p_X \cdot ds = 0;\\
&\Delta T + N\cdot d\alpha + Y + p\cdot ds = 0;\\
&\Delta M - T\cdot r\cdot d\alpha - M_e = 0.
\end{aligned} \qquad (2.6)$$

Aceste relații conțin termeni de mărime finită şi de mărime infinit mică. Dacă se neglijează termenii infiniți mici față de termenii finiți se obțin ecuațiile:

$$\Delta N = -X, \qquad \Delta T = -Y, \qquad \Delta M = M_e \qquad (2.7)$$

Neglijarea termenilor infinit mici se poate face (şi trebuie să se facă) numai în dreptul sarcinilor concentrate. Din relațiile (2.7) rezultă: **în dreptul unei sarcini concentrate cel puțin un efort are un salt egal cu valoarea componentei sarcinii concentrate pe direcția respectivă**. Spre exemplu, în dreptul unei forțe concentrate

longitudinale X, în diagrama de forțe axiale va apare un salt egal cu valoarea componentei X, în dreptul unei forțe concentrate transversale Y, în diagrama forțelor tăietoare va trebui să existe un salt egal cu valoarea componentei Y, iar în dreptul unui moment concentrat M_e, în diagrama momentelor încovoietoare apare un salt egal cu valoarea momentului M_e.

Dacă, pe elementul ds, **nu sunt aplicate sarcini concentrate** (**X=0**, **Y=0** şi **M_e=0**) atunci relațiile (2.7) trebuie să conțină numai termenii cu infiniți mici. În acest caz şi variația eforturilor trebuie să fie infinit mică, aşa că se consideră:

$$\Delta N \rightarrow dN, \qquad \Delta T \rightarrow dT, \qquad \Delta M \rightarrow dM.$$

Ținând seama de aceste relații şi că ds=r·dα, din (2.6) se obține:

$$\frac{dN}{ds} = \frac{T}{r} - p_X, \qquad \frac{dT}{ds} = -\frac{N}{r} - p, \qquad \frac{dM}{ds} = T. \qquad \textbf{(2.8)}$$

În cazul barelor drepte (r = ∞; rezultă ds = dx) şi în absența forțelor axiale relațiile (2.8) devin:

$$\frac{dM}{dx} = T, \qquad \frac{dT}{dx} = -p. \qquad \textbf{(2.9)}$$

Pe baza acestor relații rezultă:

- derivând expresia momentului încovoietor în raport cu variabila "x" se obține expresia forței tăietoare;

- derivând expresia forței tăietoare în raport cu variabila "x" se obține expresia sarcinii distribuite cu semnul minus.

Derivând încă o dată prima relație şi ținând seama de a doua, se obține:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -p. \qquad \textbf{(2.10)}$$

Observații:

a) Relațiile (2.8), (2.9) şi (2.10) sunt relații diferențiale ale funcțiilor de eforturi **N(x)**, **T(x)** şi **M(x)**. Diagramele de eforturi reprezintă integralele acestor expresii.

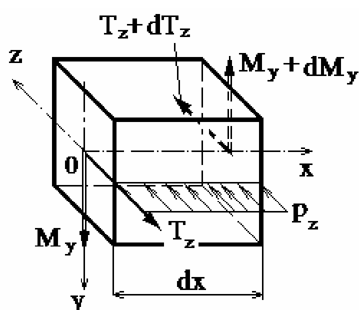


Fig. 2.8

b) Relația (2.10) arată că ecuația forței tăietoare se poate obține, fie din integrarea expresiei sarcinii, fie din derivarea expresiei momentului încovoietor.

c) Dacă sarcinile sunt conținute în planul xOy (fig.2.8) ecuațiile de echilibru sunt:

$$-\mathbf{T_Z}+\mathbf{p_Z}\cdot\mathbf{dx}+\left(\mathbf{T_Z}+\mathbf{dT_Z}\right)=\mathbf{0},$$

$$\mathbf{M_Y}-\mathbf{T_Z}\cdot\mathbf{dx}+\mathbf{p_Z}\cdot\mathbf{dx}\cdot\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{2}}-\left(\mathbf{M_Y}-\mathbf{dM_Y}\right)=\mathbf{0}$$

astfel se obține:

$$\frac{\mathbf{dM_y}}{\mathbf{dx}}=\mathbf{T_z},\qquad \frac{\mathbf{dT_z}}{\mathbf{dx}}=-\mathbf{p_z},\qquad \mathbf{(2.11,a)}$$

$$\frac{\mathbf{d^2M_Y}}{\mathbf{dx^2}}=\frac{\mathbf{T_z}}{\mathbf{dx}}=-\mathbf{p_z}.\qquad \mathbf{(2.11,b)}$$

2.6. Reguli practice pentru trasarea diagramelor de eforturi

Pentru cazul când forțele transversale sunt nule (**Y= 0**; **p= 0**), din relațiile (2.10) se obține:

$$\mathbf{T}=\mathbf{C_1},\qquad \mathbf{M_i}=\mathbf{C_1}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{C_2}.\qquad \mathbf{(2.12)}$$

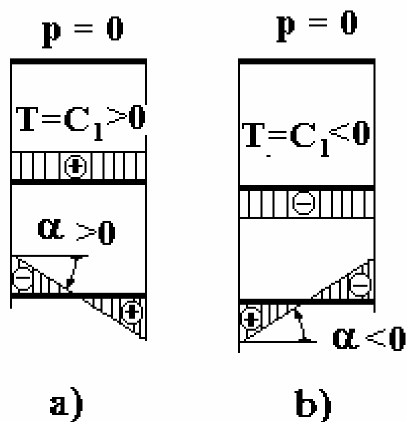


Fig. 2.9

Deci, **când forțele transversale sunt nule, forța tăietoare este constantă iar momentul încovoietor variază liniar** (fig.2.9,a și b). C_1 și C_2 sunt constante de integrare și reprezintă forța tăietoare, respectiv momentul încovoietor, la limita din stânga sau din dreapta secțiunii considerate.

Dacă pe o porțiune de bară se aplică o forță transversală uniform distribuită (p = ct.) atunci din relațiile (2.10) se obține:

$\mathbf{T = C_1 - p_1 \cdot x}$ (variație liniară),

$\mathbf{M = C_2 + C_3 \cdot x - p \cdot x^2}$ (variație parabolică). **(2.13)**

Pentru acest caz, s-au reprezentat câteva moduri de variație a forței tăietoare şi momentului încovoietor, pentru o porțiune de bară (fig.2.10).

Relația a doua (2.10) arată că **forța tăietoare este egală cu panta la curba momentelor încovoietoare**.

Din figurile 2.9 şi 2.10 se observă că pe porțiunea unde:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T > 0 \quad \rightarrow \quad M\ \ creste,}\\
&\mathbf{T < 0 \quad \rightarrow \quad M\ \ scade,}\\
&\mathbf{T\ \ trece\ prin\ zero \ \rightarrow \quad M_{max}\ sau\ M_{min},}\\
&\mathbf{T = 0 \quad \rightarrow \quad M\ =\ ct.}
\end{aligned} \qquad \mathbf{(2.14)}$$

Dacă se ține seama de relațiile (2.7), în cazul acțiunii sarcinilor concentrate, rezultă că unei variații bruşte a forței tăietoare îi corespunde o schimbare bruscă a pantei momentului încovoietor. Aşa că **diagrama de momente are un punct de schimbare a pantei tangentei (se frânge) în dreptul sarcinii transversale concentrate**.

Pe lângă regulile menționate mai sus, pentru trasarea diagramelor de eforturi, este necesar să se respecte următoarele etape:

a) se eliberează bara de legături, se reprezintă reacțiunile şi se determină valorea acestora din ecuațiile de echilibru ;

b) se alege un sens de parcurs al barei, adică o origine axei Ox şi sensul acesteia, care poate fi de la stânga la dreapta sau de la dreapta la stânga, de sus în jos sau de jos în sus etc.;

c) se stabilesc funcțiile de eforturi, adică expresiile N(x), T(x) şi M(x) pentru fiecare tronson de bară;

d) pentru fiecare efort existent se trasează câte **o linie de referință groasă**, paralelă cu axa barei şi de aceeaşi lungime cu aceasta;

e) forțele axiale, forțele tăietoare şi momentele de răsucire pozitive se reprezintă la scară deasupra liniei de referință; momentele de încovoiere pozitive se reprezintă sub linia de referință;

f) reprezentarea eforturilor în diagrame se face prin trasarea unor **segmente de dreaptă perpendiculare pe linia de referință, ce reprezintă la scară, valoarea efortului respectiv**.

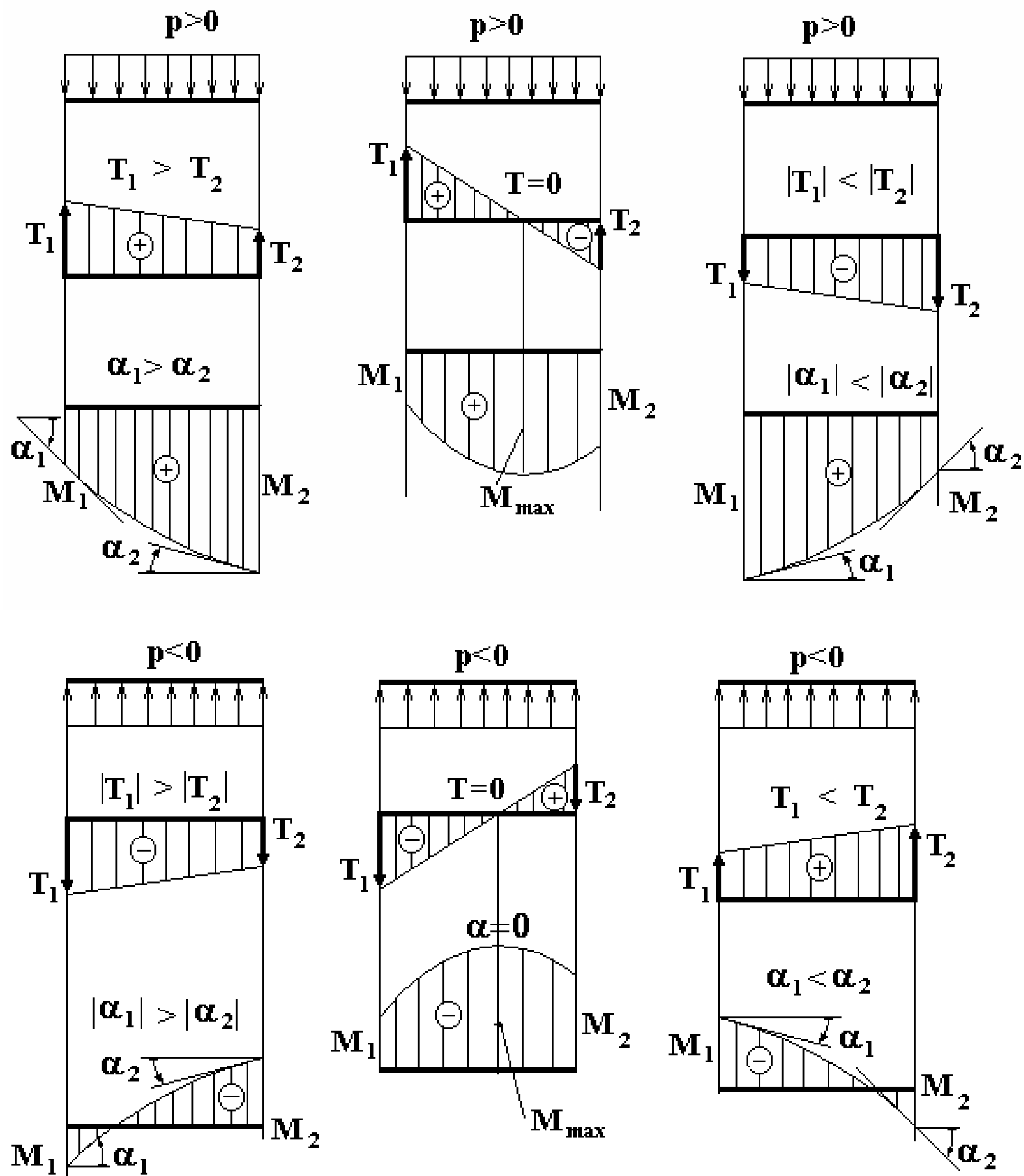


Fig. 2.10

2.7. Diagrame de eforturi

Diagramele de eforturi sunt necesare pentru determinarea secțiunii periculoase şi de aceea se trasează întotdeauna pentru toate barele solicitate. Pe diagrame se observă imediat atât **solicitările** cât şi **secțiunile cele mai solicitate (periculoase)**, precum şi valorile extreme ale eforturilor.

2.7.1. Bare drepte solicitate de forțe axiale

În aceste cazuri forțele exterioare ce acționează în lungul barei se reduc la rezultante a căror suport este chiar axa barei.

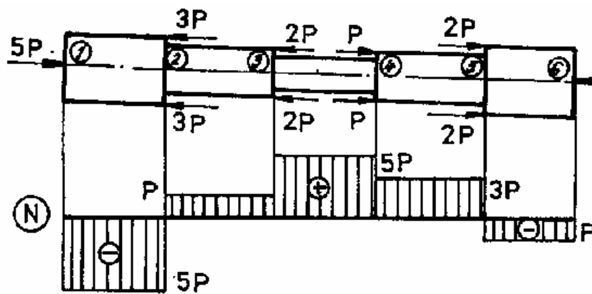


Fig.2.11

Aplicația 2.1. Să se traseze diagrama de eforturi pentru bara cu încărcarea din figura 2.11.

Eforturile sunt:

$N_{1s}= 0$; $N_{1d}= N_{2s}= -5P$; $N_{2d}= N_{3s}= P$; $N_{3d}= N_{4s}= 5P$; $N_{4d}= N_{5_s}= 3P$; $N_{5_d}= N_{6_s}= -P$; $N_{6_d}= 0$.

Aplicația 2.2. Un stâlp vertical solicitat de sarcina axială P=500 kN este format din două tronsoane şi se sprijină pe un bloc de beton. Atât stâlpul, pe cele două tronsoane cât şi fundația au secțiuni constante şi lungimile din figura 2.12. Greutatea distribuită pe lungimea 1-2 este de q_1= 25 kN/m, pe porțiunea 2-3, q_2= 35 kN/m, iar a fundației de q_3= 90 kN/m. Să se traseze daigramele de eforturi.

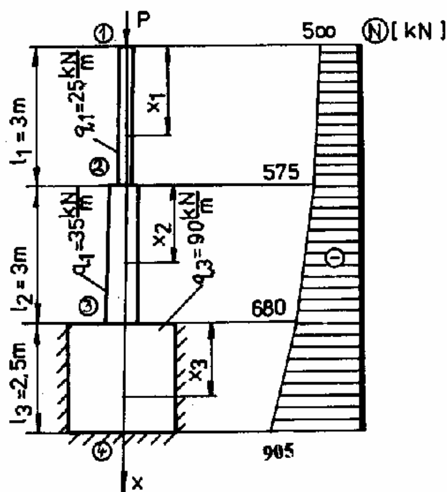


Fig. 2.12

Într-o secțiune oarecare, la abscisa x_1, forța axială este:

$N(x_1) = - P - q_1 \cdot x_1$,

$N_{x1} = - 500 - 25 \cdot x_1$,

deci, variază liniar.

Valorile extreme sunt:

$N_1 = - 500$ kN, $N_2 = - 500 - 25 \cdot 3 = - 575$ kN.

Într-o secțiune oarecare pe tronsonul 2-3 forța axială are expresia:

$N(x_2) = - P - q_1 \cdot l_1 - q_2 \cdot x_2$,

iar valorile extreme vor rezulta:

$N_2 = - 500 - 25 \cdot 3 = - 575$ kN, $N_3 = - 500 - 25 \cdot 3 - 35 \cdot 3 = - 680$ kN

Într-o secțiune pe porțiunea fundației forța axială este dată de expresia:

$N(x_3) = - P - q_1 \cdot l_1 - q_2 \cdot l_2 - q_3 \cdot x_3$,

iar valorile extreme sunt:

$N_3 = - 500 - 25 \cdot 3 - 35 \cdot 3 = - 680$ kN,

$N_4 = - 500 - 25 \cdot x_3 - 35 \cdot x_3 - 90 \cdot x_2 = - 905$ kN.

Diagrama de variație a eforturilor axiale este redată în dreapta barei.

2.7.2. Bară (grindă) dreaptă solicitată la încovoiere

Pentru început se vor considera barele drepte solicitate de forțe exterioare verticale situate în unul din planele de simetrie longitudinale ale barei. În acest caz în secțiunile transversale ale barei, la acțiunea sarcinilor se produc: forțe axiale, forțe tăietoare şi momente de încovoiere.

2.7.2.1. Bara în consolă

La barele în consolă (încastrate la un capăt şi libere la celălalt) diagramele de eforturi se pot trasa şi fără calculul prealabil al reacțiunilor. În acest caz se consideră

originea sistemului de referință în capătul liber, iar reacțiunile vor fi egale cu valorile eforturilor din încastrare.

Aplicația 2.3. Bara încastrată la un capăt şi încărcată la celălalt cu o sarcină concentrată (fig.2.13). În figura (2.13,a), bara are capătul liber în dreapta, iar în figura

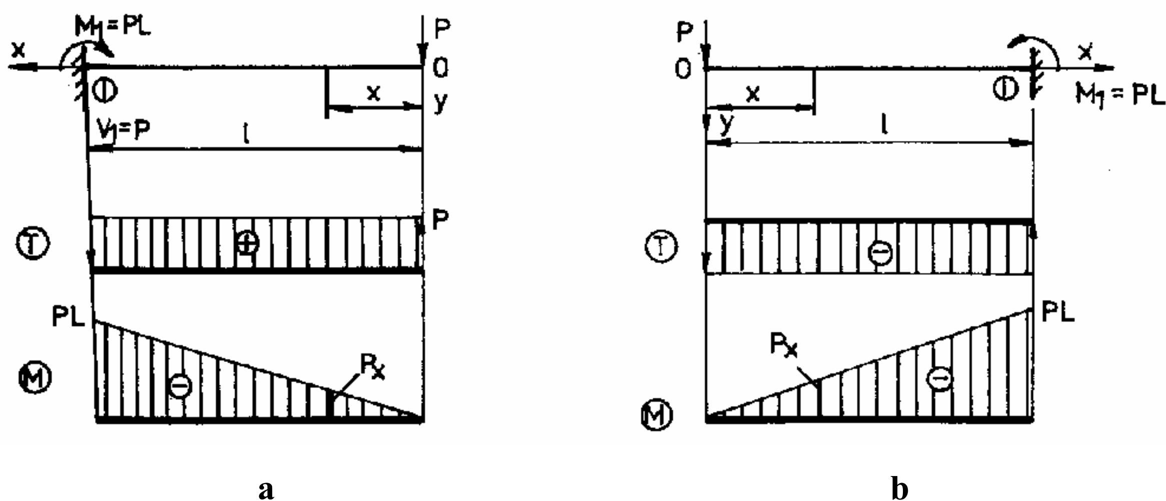


Fig. 2.13

(2.13,b), capătul liber este în stânga.

Pentru bara din figura (2.13,a), funcțiile de eforturi sunt:

$T_x = P = ct.$

$M_x = - P \cdot x$ (variază liniar) şi are valorile $M_0 = 0$ şi $M_1 = - P \cdot l$

Pentru bara din figura (2.13,b) eforturile sunt:

$T_x = - P = ct.$

$M_x = - P \cdot x$, $M_0 = 0$ şi $M_1 = - P \cdot L$.

Observație: Forțele tăietoare sunt egale în valoare absolută, dar diferă ca semn.

Aplicația 2.4 Bara în consolă solicitată de o forță transversală uniform distribuită (fig.2.14).

În secțiunea x eforturile sunt:

$T_x = - p \cdot x$ (dreaptă),

$M_x = - p \cdot x \cdot x/2 = - p \cdot x^2/2$ (parabolă),

iar valorile extreme rezultă:

$T_0 = 0$; $T_1 = -p \cdot L$; $M_0 = 0$; $M_1 = -p \cdot L^2/2$.

Reacțiunile din încastrare sunt:

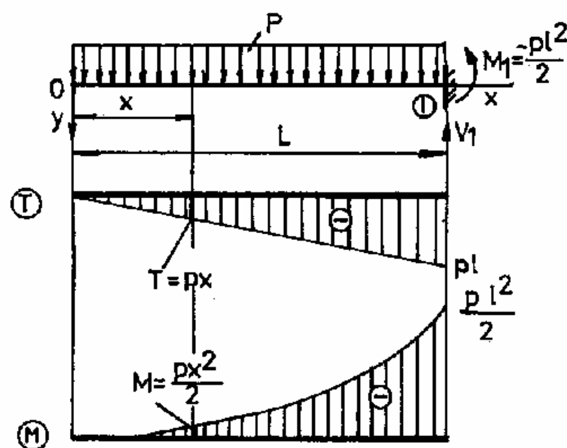


Fig. 2.14

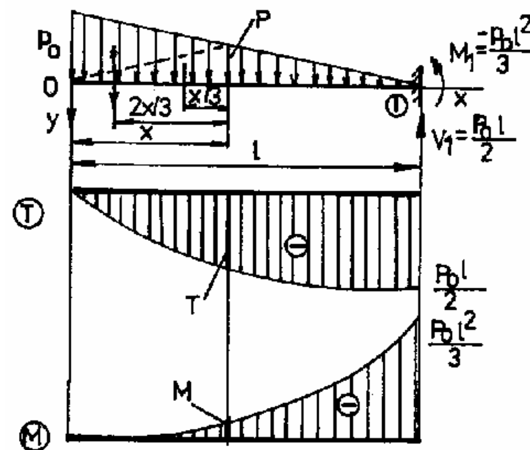


Fig. 2.15

$V_1 = p \cdot L$; $M_1 = -p \cdot L^2/2$.

Aplicația 2.5. Bară în consolă solicitată de o forță liniar distribuită (fig. 2.15).

Încărcarea este determinată de intensitatea maximă a sarcinii p_0. Sarcina totală pe bară este de $P = p_0 \cdot L/2$, iar intensitatea sarcinii într-o secțiune oarecare, la distanța x de capăt, este:

$$p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Eforturile în secțiunea x sunt:

$$T_x = -(p_0 + p) \cdot \frac{x}{2} = -\frac{p_0 \cdot x}{2} \cdot \left(2 - \frac{x}{L}\right),$$

$$M_x = -p_0 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{3} - p \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = -\frac{p_0 \cdot x^2}{6} \cdot \left(3 - \frac{x}{L}\right).$$

Se observă că forța tăietoare variază după o parabolă de gradul 2, iar momentul încovoietor după o parabolă de gradul 3. În cele două capete ale barei eforturile vor avea valorile:

$T_0=0$, $M_0=0$, $T_1= - p_0 \cdot L/2$, $M_1= - p_0 \cdot L/3$,
iar reacţiunile vor fi:

$$V_1 = p_0 \cdot \frac{L}{2}, \quad M_1 = -\frac{p_0 \cdot L^2}{3}.$$

Observaţii:

a) Forţa tăietoare într-o secţiune oarecare x este egală cu suprafaţa diagramei forţelor distribuite pe lungimea Ox;

b) Momentul încovoietor într-o secţiune x este produsul între rezultanta forţelor pe lungimea Ox şi distanţa de la secţiunea x, la rezultantă.

2.7.2.2. Bara (grinda) simplu rezemată

Bara simplu rezemată are la un capăt un reazem simplu iar la celălalt o articulaţie. În articulaţie se vor considera două componente ale reacţiunii şi anume V pe verticală şi H pe orizontală. În reazemul simplu apare o singură reacţiune şi anume o forţă normală pe suprafaţa de rezemare.

Distanţa dintre cele două reazeme, este L şi **se numeşte deschiderea barei (grinzii).**

Aplicaţia 2.6. Bara simplu rezemată solicitată de o forţă concentrată Q ce acţionează oblic (fig.2.16).

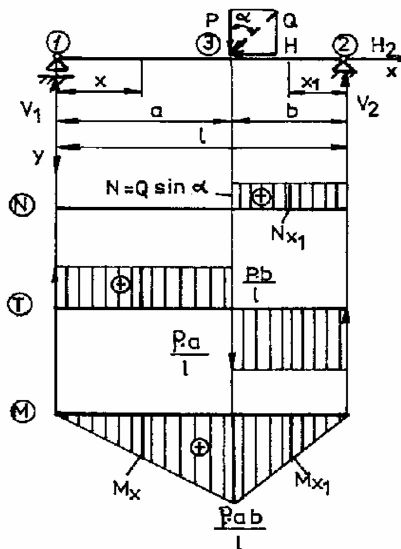


Fig. 2.16

Se descompune forţa Q în componentele:

$P = Q \cdot \cos\alpha$ şi $H = Q \cdot \sin\alpha$.

Reacţiunile au valorile:

$H_2 = H = Q \cdot \sin\alpha$; $V_1 = P \cdot b/L$ şi $V_2 = P \cdot a/L$.

Într-o secțiune oarecare x, situată în stânga sarcinii Q eforturile sunt:

$N_x = 0$; $T_x = V_1 = P \cdot b/L$; $M_x = V_1 \cdot x = P \cdot b \cdot x/L$.

Forța axială şi forța tăietoare au valori constante,

$N_{1d} = 0$; $T_{1d} = V_1 = P \cdot b/L$,

$M_1 = 0$; $M_{3s} = P \cdot a \cdot b/L$.

Considerând originea în 2 (pornind din partea dreaptă) se obțin eforturile în secțiunea x_1:

$N_{x_1} = H_2 = Q \cdot \sin\alpha$; $T_{x_1} = - P \cdot a/L$,

$M_{x_1} = V_2 \cdot x_1 = P \cdot a \cdot x_1/L$.

Eforturile în secțiunile 2 şi 3 sunt :

$N_{2s} = N_{3d} = N_{x_1} = Q \cdot \sin\alpha$;

$T_{2s} = T_{3d} = V_2 = - P \cdot a/L$;

$M_2 = 0$; $M_{3d} = P \cdot a \cdot b/L$.

Observații:

a) Forța axială are valoare constantă şi diferită de zero între articulație şi punctul de aplicație al forței Q.

b) Forța tăietoare are valoare constantă, egală cu valoarea reacțiunii V_1 pe porțiunea 1-3, **are un salt egal cu valoarea componentei verticale P în dreptul forței Q**, iar pe porțiunea 3-2 are valoare constantă şi egală şi de sens opus reacțiunii V_2.

c) Momentul încovoietor are variație liniară pe ambele porțiuni (unde forțele tăietoare sunt constante) şi este maxim în dreptul forței concentrate (unde forța tăietoare trece prin zero).

Dacă poziția forței este variabilă pe bară, se poate determina poziția pentru care se poate produce cel mai mare moment încovoietor, numit **moment maxim-maximorum**. Aceasta se obține înlocuind $b = L - a$, în ecuația momentului maxim, derivând în raport cu a şi considerând derivata egală cu zero:

$$\frac{d}{da}\left(M_{max}\right)=\frac{d}{da}\left(P\cdot a\cdot\frac{L-a}{L}\right)=\frac{P}{L}\left(L-2\cdot a\right)=0$$

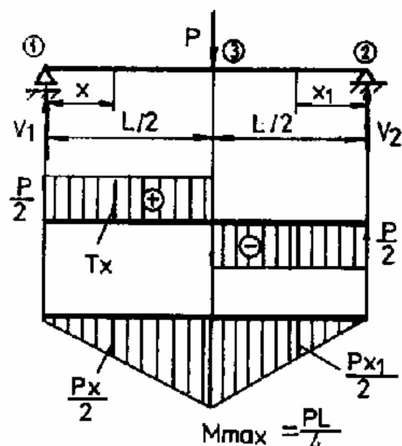


Fig. 2.17

din care rezultă distanța **a** pentru care se obține momentul cel mai mare. Aceasta se produce când sarcina acționează la mijlocul barei: a = L/2 (fig.2.17).

În acest caz, din cauza simetriei, reacțiunile sunt:

$V_1 = V_2 = P/2$.

Eforturile în secțiunea x (din stânga) sunt:

$T_x = V_1 = P/2$,

$M_x = V_1 \cdot x = P \cdot x/2$

şi în secțiunea x_1 (din dreapta):

$T_{x1} = - V_1 = - P/2$,

$M_{x1} = V_2 \cdot x_1 = P \cdot x_1/2$.

Momentul încovoietor maxim, în secțiunea din dreptul forței este:

$$M_{max}=\frac{P\cdot L}{4}.$$

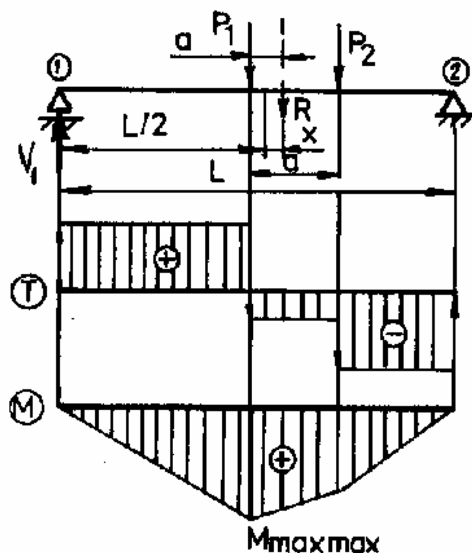


Fig. 2.18

Aplicația 2.7. Să se determine poziția a două forțe concentrate $P_1 \geq P_2$, mobile pe o bară simplu rezemată, care produc momentul maxim-maximorum (fig. 2.18).

Rezultanta celor două forțe este:

$R = P_1 + P_2$,

ce acționează la distanța “x” de mijlocul deschiderii barei şi la distanța “a” de forța cea mai mare, P_1.

Reacţiunea din reazemul 1 este:

$$V_1 = \frac{R \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)}{L}.$$

Momentul maxim este în dreptul forţei P_1, şi are expresia:

$$M_{max} = V_1 \cdot \left(\frac{L}{2} + x - a\right) = \left(L^2 - 2 \cdot a \cdot L - 4 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot x\right) \cdot \frac{R}{4L}.$$

Momentul maxim-maximorum se obţine pentru valoarea lui x ce anulează derivata expresiei momentului încovoietor maxim:

$$\frac{dM_{max}}{dx} = \left(-2 \cdot x + a\right) \cdot \frac{R}{4L} = 0,$$

adică pentru x = a/2.

Pentru x = a/2 rezultă momentul maxim-maximorum :

$$M_{max\,max} = \left(P_1 + P_2\right) \cdot \frac{\left(L - a\right)^2}{4L}. \qquad \textbf{(2.15)}$$

Observaţie: Dacă pe o bară se mişcă un convoi de forţe concentrate P_1, P_2, P_3,..P_k,...P_n, (fig.2.19) în care P_k este forţa ce are valoarea cea mai mare din imediata vecinătate a rezultantei, momentul maxim se va produce în dreptul acesteia. Notând cu x distanţa de la mijlocul barei la rezultanta forţelor aflate pe bară şi cu "a" distanţa dintre rezultantă şi forţa P_k, se poate calcula reacţiunea V_1 şi apoi momentul maxim:

$$V_1 = \frac{R \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)}{L},$$

$$M_{max} = V_1 \cdot \left(\frac{L}{2} + x - a\right) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot c_i = \frac{R}{L} \cdot \left(\frac{L}{4} - \frac{a \cdot L}{2} - a \cdot x - x^2\right) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot c_i .$$

În care s-a notat cu P_i sarcinile aflate la stânga forței P_k , iar cu c_i distanța de la forța P_k la forțele P_i

Prin derivare şi anularea derivatei momentului maxim se obține distanța **x = a/2** pentru care se produce $M_{max-max}$:

$$M_{mam\ max} = \frac{R}{4} \cdot \left(L - a^2\right) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot c_i .$$

Aplicația 2.8. Bară simplu rezemată, solicitată de sarcini transversale uniform distribuite (fig.2.20).

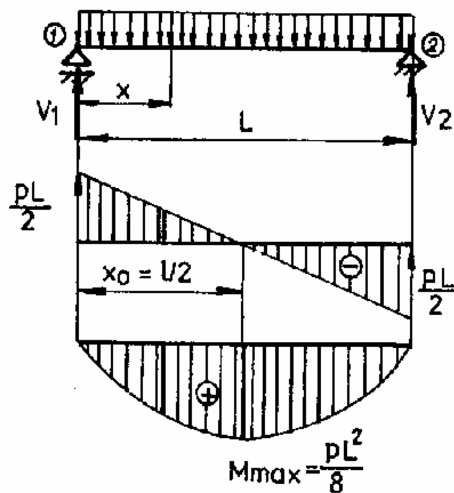


Fig. 2.20

Încărcarea fiind simetrică reacțiunile sunt:

$V_1 = V_2 = p_1 \cdot L/2$.

Eforturile într-o secțiune x sunt:

$T_x = V_1 - p \cdot x = p \cdot (L/2 - x)$, (variază liniar);

$M_x = V_1 \cdot x - p \cdot x \cdot x/2 = p \cdot x \cdot (L - x)/2$, (variază parabolic).

Valorile în punctele de rezemare sunt:

$T_1 = V_1 = p \cdot L/2$, $M_1 = 0$,

$T_2 = V_2 = - p \cdot L/2$, $M_2 = 0$.

La distanța $x_0 = L/2$; T = 0 şi deci

$M_{max} = p \cdot L^2/8$.

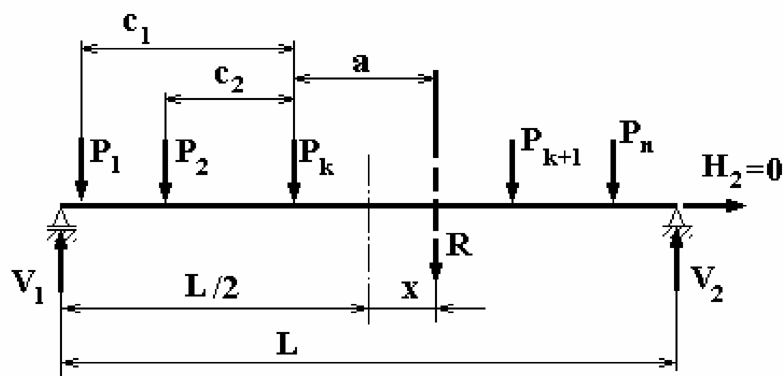


Fig. 2.19

Observație:

Dacă se notează cu P = p ·L, sarcina de pe bară, se observă că momentul maxim (M_{max}= p·L^2/8) este jumătate din momentul maxim produs de sarcina concentrată P care ar acționa la mijlocul barei, când M_{max}= P·L/4 (vezi fig.2.17).

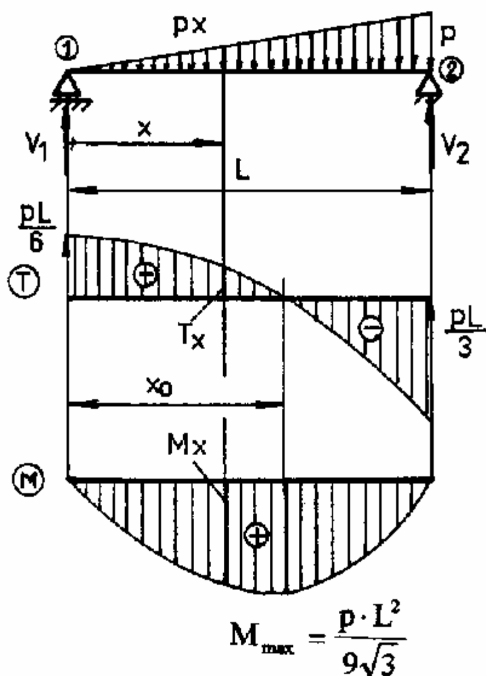


Fig. 2.21

Aplicația 2.9. Bară simplu rezemată solicitată de o sarcină transversală ce variază liniar (fig.2.21).

Reacțiunile au valorile:

$$V_1 = \frac{1}{L} \cdot \frac{p \cdot L}{2} \cdot \frac{L}{3} = \frac{p \cdot L}{6},$$

$$V_2 = \frac{1}{L} \cdot \frac{p \cdot L}{2} \cdot \frac{2 \cdot L}{3} = \frac{p \cdot L}{3}.$$

Valoarea sarcinii în secțiunea x este:

$$p_x = p \cdot \frac{x}{L}.$$

Eforturile în secțiunea x sunt:

$$T_x = V_1 - \frac{1}{2} \cdot x \cdot p_x = p \cdot \frac{L}{6} - p \cdot \frac{x^2}{2L}, \quad \text{(parabolă de gradul 2)},$$

$$M_x = V_1 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot p_x \cdot \frac{x}{3} =$$

$$= \frac{p \cdot L}{6} \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{L} \cdot \frac{x}{3} = p \cdot \frac{L^2 - x^2}{6L} \cdot x, \quad \text{(parabolă de gradul 3)}.$$

Valorile eforturilor în reazeme sunt:

T_{max}= T_1= V_1= p ·L/6, M_1= 0,

T_{min}= T_2= - V_2=- p ·L/3, M_2= 0.

Din condiția:

$$T_x = \frac{p \cdot L}{6} - \frac{p \cdot x_0^2}{2L} = 0,$$

rezultă abscisa secțiunii unde momentul încovoietor are valoarea maximă:

$$x_0 = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0{,}5574 \cdot L,$$

iar momentul maxim, rezultă:

$$M_{max} = p \cdot \frac{L^2 - x_0^2}{6} \cdot x_0 = \frac{p \cdot L^2}{9\sqrt{3}}.$$

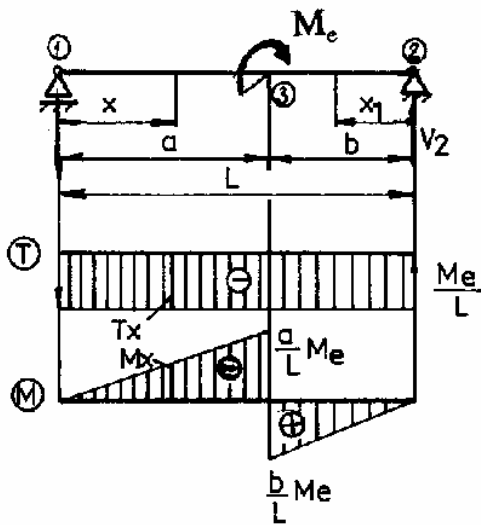


Fig. 2.22

Aplicația 2.10. Bară simplu rezemată solicitată de un cuplu M_e, (fig.2.22).

Reacțiunile din reazeme sunt:

$$V_1 = V_2 = \frac{M_e}{L}.$$

Eforturile în secțiunea x respectiv x_1 sunt:

$$T_X = T_{X_1} = V_1 = \frac{M_e}{L}, \qquad \text{(constantă)},$$

$$M_x = -V_1 \cdot x = -M_e \cdot \frac{x}{L}, \text{(variație liniară)},$$

$$M_{X_1} = V_2 \cdot x_1 = M_e \cdot \frac{x_1}{L}, \text{(variație liniară)}.$$

Momentul încovoietor este zero în reazeme ($x = 0$ şi $x_1 = 0$) şi are valorile extreme la stânga şi respectiv la dreapta secțiunii 3 şi sunt:

$$M_{3s} = -V_1 \cdot a = -\frac{a}{L} \cdot M_e, \qquad M_{3d} = V_2 \cdot b = \frac{b}{L} \cdot M_e.$$

În dreptul cuplului, diagrama momentelor încovoietoare are un salt egal cu valoarea cuplului M_e: (de la $-\frac{a}{L} \cdot M_e$ la $\frac{b}{L} \cdot M_e$).

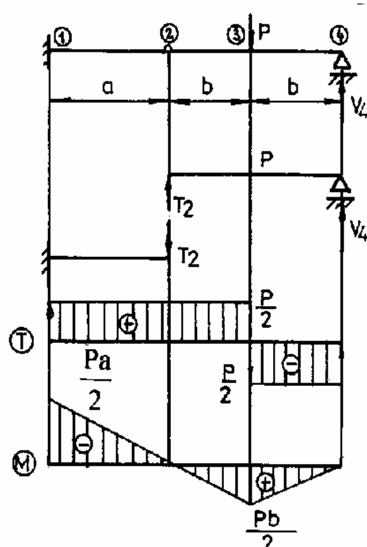


Fig. 2.23

Aplicația 2.11. Bară încastrată la un capăt, rezemată la celălalt cu articulație intermediară, solicitată de o forță concentrată (fig. 2.23).

Articulația intermediară transmite numai eforturi tangențiale şi normale dar nu transmite momente încovoietoare. Ținând seama de această situație, bara se poate separa, în dreptul articulației, în două grinzi. Reacțiunile intermediare, din articulație, sunt tocmai eforturile din secțiunea respectivă.

Valoarea reacțiunii V_4 este:

$$V_4 = \frac{P \cdot b}{b + b} = \frac{P}{2},$$

iar valoarea reacțiunii din articulația 2, care este tocmai forța tăietoare din secțiune este:

$T_2 = P - V_4 = P/2$

Porțiunea 1-2 este o bară în consolă acționată la capătul liber de forța T_2. În acest caz se obțin eforturile: $T_{4d} = T_{3s} = -V_4 = -\frac{P}{2}$, $T_{3d} = T_{2s} = T_1 = \frac{P}{2}$,

$$M_4 = 0, \quad M_3 = V_4 \cdot b = \frac{P \cdot b}{2}, \quad M_2 = 0, \qquad M_1 = -T \cdot a = -\frac{P \cdot a}{2}.$$

Observație: După ce bara se separă în două părți, în dreptul articulației intermediare, problema trasării diagramelor de eforturi se reduce la cazuri cunoscute ale barelor rezultate din separare.

2.7.3. Diagrame de eforturi la arbori

Arborii sunt bare încărcate cu forțe ale căror direcții nu trec prin axa barei, sau asupra lor acționează cupluri de forțe situate în plane perpendiculare pe axa barei. Forțele sau cuplurile de forțe se transmit la arbori prin roți dințate, roți de curea, pârghii, cuplaje, etc.

Valoarea momentului de răsucire se calculează fie în funcție de distanța de la suportul forței la axa arborelui (brațul forței), fie în funcție de puterea şi turația ce trebuie transmisă.

Dacă un arbore transmite o putere P^*, dată în kW, la o turație n, în rot/min, atunci momentul de torsiune rezultă din relația:

$$\mathbf{P^* = M_t \cdot \omega = M_t \cdot \frac{\pi \cdot n}{30}},$$

astfel că:

$$\mathbf{M_t\left[kNm\right] = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P^*\left[kW\right]}{n\left[rot / min\right]}}. \qquad \mathbf{(2.16)}$$

Dacă puterea se dă în W momentul de torsiune rezultă în Nm. Când puterea este dată în CP (cai putere), pentru a obține momentul de torsiune, se utilizează relația:

$$\mathbf{M_t\left[kNm\right] = 7{,}02 \cdot \frac{P^*\left[CP\right]}{n\left[rot / min\right]}}. \qquad \mathbf{(2.17)}$$

Momentul de torsiune se consideră pozitiv când vectorul moment de răsucire din stânga are sensul axei Ox, sau când roteşte secțiunea din stânga față de cea din capătul din dreapta în sensul burghiului drept.

Aplicația 2.12. Să se traseze diagramele de puteri şi de momente de torsiune pentru un arbore drept ce primeşte o putere P^*= 10 kW la o turație n = 125 rot/min prin roata (3) şi o distribuie astfel:

- 25% la roata (1),

- 30% la roata (2),

- şi restul la roata (4).

Puterile pe cele trei intervale sunt:

$$P^*_{1-2} = -0{,}25 \cdot P^* = -2{,}5 \ \text{kW},$$

$$P^*_{2-3} = (-0{,}25 + 0{,}3) \cdot P^* = -5{,}5 \ \text{kW},$$

$$P^*_{3-4} = (1 - 0{,}25 - 0{,}3) \cdot P^* = 4{,}5 \ \text{kW},$$

Variaţia puterii este dată în diagrama P^* din figura 2.24.

Valorile momentelor de torsiune pe cele trei intervale sunt:

$$M_{t_{1-2}} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P_{1-2}}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{-2{,}5}{125} = -0{,}191 \ \text{kNm},$$

$$M_{t_{2-3}} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P_{2-3}}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{-5{,}5}{125} = -0{,}42 \ \text{kNm},$$

$$M_{t_{3-4}} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P_{3-4}}{n} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{4{,}5}{125} = -0{,}344 \ \text{kNm}.$$

Diagrama de variaţie a momentelor de răsucire M_t, este reprezentată în fig. 2.24.

Observaţie: Preluarea puterii prin roata mediană şi transmiterea acesteia la roţile dispuse de o parte şi de cealaltă a roţii motoare constituie una din cele mai eficiente moduri de încărcare a arborelui. În acest mod puterea se distribuie în mod aproape egal atât în stânga cât şi în dreapta roţii motoare. Dacă roata motoare se află la unul din capetele arborelui, în vecinătatea acesteia acţionează întreaga putere de 10 kW, respectiv întregul moment de răsucire, M_t= 0,42 + 0,34 = 0,764 kNm. În acest caz arborele trebuie dimensionat la un moment de răsucire aproape dublu.

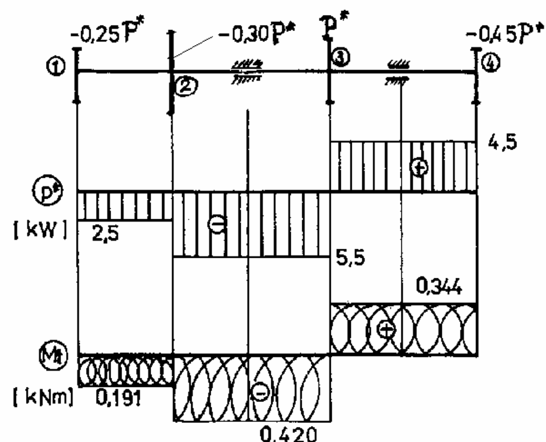


Fig. 2.24

Aplicația 2.13. Să se traseze diagramele de eforturi pentru arborele din fig. 2.25.

Reacțiunile figurate au valorile:

$$V_1 = \frac{a \cdot P}{5 \cdot a} = 0{,}2 \cdot P,$$

$$V_2 = \frac{4 \cdot a \cdot P}{5 \cdot a} = 0{,}8 \cdot P,$$

$$H_6 = \frac{a \cdot P}{1{,}6 \cdot a} = 0{,}625 \cdot P,$$

$$H_1 = \frac{4 \cdot a}{5 \cdot a} = 0{,}625 \cdot P = 0{,}5 \cdot P,$$

$$H_2 = \frac{a}{5 \cdot a} \cdot 0{,}625 \cdot P = 0{,}125 \cdot P.$$

Pentru a scrie funcțiile de eforturi se aleg următoarele sisteme de axe:

$1x_1y_1z_1$ pentru bara 1-2;

$3x_2y_2z_2$ pentru bara 3-5;

$6x_3y_3z_3$ pentru bara 4-6.

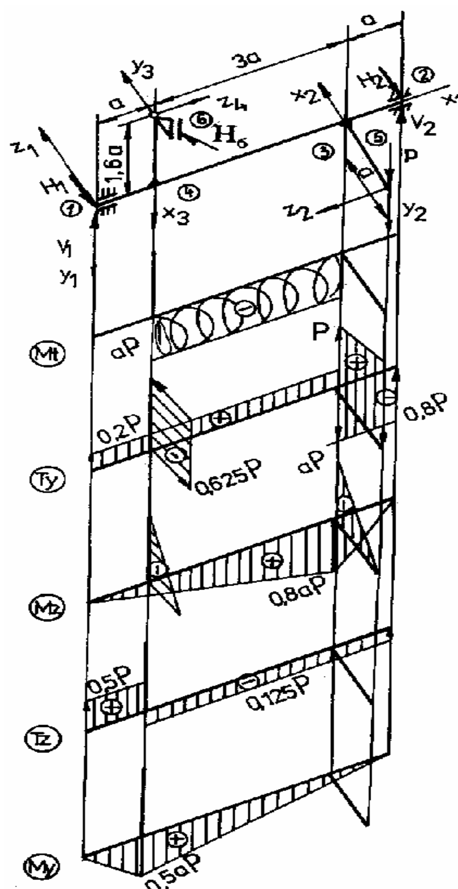


Fig. 2.25

Momentul de răsucire, ce acționează pe intervalul 4-3, are valoarea: $M_t = -\,a \cdot P$.

Forțele tăietoare sunt constante şi egale cu valorile reacțiunilor (vezi fig.2.13 şi fig.2.17). Momentele încovoietoare au o variație liniară şi sunt zero în punctele 1, 2, 5 şi 6.

În figura 2.25 s-au arătat sensurile de parcurs prin sistemele de axe alese şi s-au trasat diagramele de eforturi.

2.7.4. Diagrame de eforturi la bare curbe

În Rezistența materialelor se analizează starea de eforturi în barele curbe plane de curbură constantă. În aceste cazuri bara este un arc de cerc.

Ca şi la barele drepte, la cele curbe se alege un sens de parcurs care se marchează printr-un unghior (arc de cerc ce are la un capăt un punct de pornire şi la celălalt o săgeată).

Pentru trasarea diagramelor de eforturi se utilizează relaţiile (2.7) şi (2.8), iar diagramele se haşurează cu linii normale pe bară. Valorile eforturilor se calculează pentru anumite valori ale unghiului α.

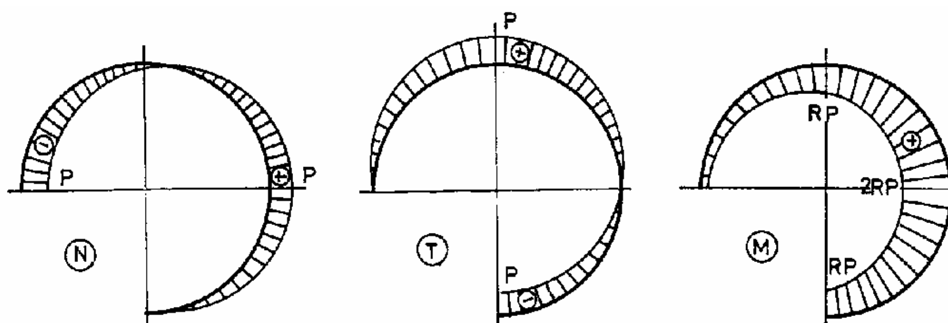


Fig. 2.27

Aplicaţia 2.14. Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă din figura 2.26.

Funcţiile de eforturi şi valorile acestora în punctele cele mai importante sunt:

α	0°	90°	180°	270°
N=-P·cosα	- P	0	P	0
T=P·sinα	0	P	0	- P
M=P·R·(1-cosα)	0	P·R	2·P·R	P·R

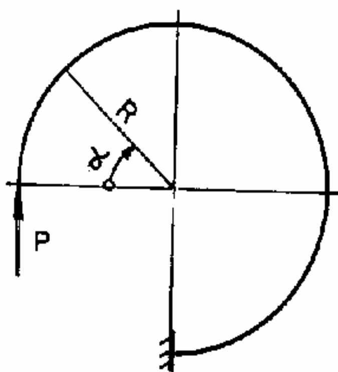


Fig. 2.26

Aplicaţia 2.15. Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara curbă din figura 2.28, solicitată de o forţă normală pe planul barei.

Funcţiile de eforturi sunt:

T = P = ct.,

$M = P \cdot R \cdot \sin\alpha$ (variație sinusoidală),

$M_t = P \cdot R \cdot (1-\cos\alpha)$ (variație cosinusoidală).

α	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°
$M=-P \cdot R \cdot \sin\alpha$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} P \cdot R$	$-P \cdot R$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P \cdot R$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P \cdot R$	$P \cdot R$
$M_t=PR(1-\cos\alpha)$	0	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot$ $\cdot P \cdot R$	$P \cdot R$	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot$ $\cdot P \cdot R$	$2P \cdot R$	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ $\cdot P \cdot R$	$P \cdot R$

Valorile momentelor sunt redate în tabelul de mai jos iar modul de variație în lungul axei barei este reprezentat în diagramele din figura 2.28.

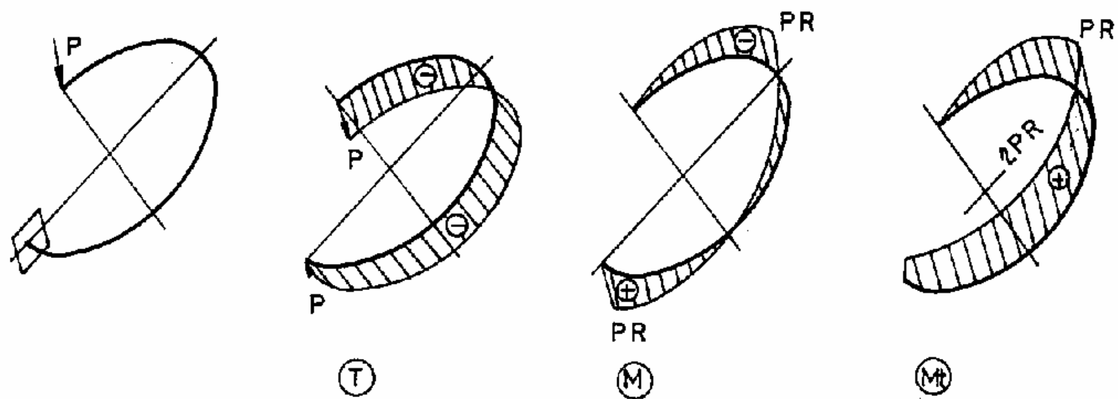


Fig. 2.28